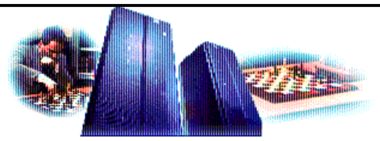
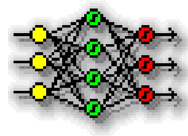




Sistemi Intelligenti
Introduzione al calcolo delle probabilità - I

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratory of Applied Intelligent Systems (AIS-Lab)
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Overview

Probabilità semplice e condizionata

Teorema di Bayes

Incertezza

- Le azioni “intelligenti” vengono fatte verso un ambiente che presenta una certa dose di **incertezza**.

E.g. Dobbiamo andare a Malpensa. Quanto tempo prima dobbiamo partire?
Dalla nostra esperienza deriviamo che 60 minuti sono sufficienti se.....

Rimane un po’ di incertezza. Se partiamo 120 minuti prima ci teniamo un margine, ma passeremo facilmente tanto tempo in aereoporto senza fare nulla.

Quando prendiamo una decisione, teniamo conto in modo più o meno esplicito di questi elementi. Questi elementi hanno a che fare con a statistica.

Probabilità (visione frequentista)

$$P(A = a_i) = \lim_{N->\infty} \frac{n_{A=a_i}}{N} = \lim_{N->\infty} \frac{n_i}{N}$$

Per il teorema del limite centrale la frequenza di un evento su infinite realizzazioni è uguale alla sua probabilità.

Supponiamo A = {a_1, a_2}
La probabilità che si verifichi uno tra tutti i casi possibili è sempre 1.
Ovverosia la somma delle probabilità di tutti gli eventi (se mutuamente esclusivi) somma 1.

$$P(A = a_1) \cup P(A = a_2) = \lim_{N->\infty} \frac{n_{A=a_1}}{N} + \lim_{N->\infty} \frac{n_{A=a_2}}{N} = \lim_{N->\infty} \frac{n_{A=a_1} + n_{A=a_2}}{N} = 1$$

$$P(A) = P(A = a_1) + P(A = a_2) = 1$$

Altri aspetti della probabilità

Problema della visione frequentista: **omogeneità del campione** (classe di riferimento). Come posso effettuare la media di eventi in modo “sicuro”?

- **Visione oggettivista.** Tendenza di un fenomeno ad accadere. Se lanciamo una moneta in aria, possiamo affermare che avremo 50% di probabilità che esca testa e 50% che esca croce. Ci aspettiamo che questa affermazione venga supportata quando effettuiamo infiniti esperimenti.
- **Visione soggettivista.** La probabilità viene espressa come credenza del soggetto. “Secondo me la probabilità di avere una carie è del 10%”. Non dipendono da un ragionamento fisico e rappresentano una probabilità a-priori. Deve potere essere corretta quando arrivano evidenze sperimentali.

Implicazioni logiche

Carie => Mal di denti Quando possiamo essere sicuri che questa proposizione (evento) sia vera? (*notice that proposition is used in logic, it is an event in AI terminology*).

Così posta sarebbe una condizione sufficiente per avere mal di denti. Ma è vero?

In realtà non è sempre vera: il mal di denti può avere diverse **cause**
Carie OR Problemi gengive OR ascessi OR ..... => Mal di denti

Vale il viceversa? Mal di denti => Carie
Neppure in questo caso, posso avere carie senza avere mal di denti.

Quali sono i problemi con l’approccio puramente logico?

Implicazioni logiche

Laziness (svogliatezza). Non si riescono ad elencare tutte le situazioni associate al mal di denti

Ignoranza teorica. Non abbiamo una conoscenza che spieghi tutto nel dominio di interesse.

Ignoranza pratica. Anche se avessimo una conoscenza completa, non riusciamo a conoscere le condizioni esatte in cui si verifica l'evento (paziente).

Possiamo ottenere un **grado di credenza (belief)** nell'affermazione.
Questa potrà rivelarsi vera o falsa con una certa probabilità.

La probabilità è basata sulla conoscenza (a-priori) non sull'evento che si è già verificato!!

Combinazione di probabilità con i connettivi logici (probabilità congiunta)

Qual'è la probabilità che la proposizione: "E' uscito 12" tirando due dadi si avveri?

$P(N=12) = P(dado_1 = 6 \text{ AND } dado_2 = 6) = P(dado_1 = 6, dado_2 = 6) = P(dado_1 = 6)\, P(dado_2 = 6) = 1/36.$

Nel caso di indipendenza, la probabilità di A e B è data dal prodotto delle probabilità:
$P(X = A \text{ OR } Y = B) = P(X=A)\, P(Y=B)$

Qual'è la probabilità che la proposizione: "E' uscito 11" tirando due dadi si avveri?

$P(N=11) = P(dado_1 = 5 \text{ AND } dado_2 = 6) \text{ OR } P(dado_1 = 6 \text{ AND } dado_2 = 5) = 1/6*1/6 + 1/6*1/6 = 2/36$

In generale:
$P(X = A \text{ OR } Y = B) = P(X=A) + P(Y=B) – P(X=A \text{ AND } Y=B).$
Nel caso di eventi indipendenti, $P(X=A \text{ AND } Y=B) =0$

Probabilità congiunta. E' una probabilità incondizionata o a-priori. Non richiede o dipende da altre informazioni.

Combinazione di probabilità con i connettivi logici (probabilità congiunta)

Qual'è la probabilità che la proposizione: "E' uscito 12" tirando due dadi si avveri?

$P(N=12) = P(dado_1 = 6 \text{ AND } dado_2 = 6) = P(dado_1 = 6, dado_2 = 6) = P(dado_1 = 6)\, P(dado_2 = 6) = 1/36.$

Nel caso di indipendenza, la probabilità di A e B è data dal prodotto delle probabilità:
$P(X = A \text{ OR } Y = B) = P(X=A)\, P(Y=B)$

Qual'è la probabilità che la proposizione: "E' uscito 11" tirando due dadi si avveri?

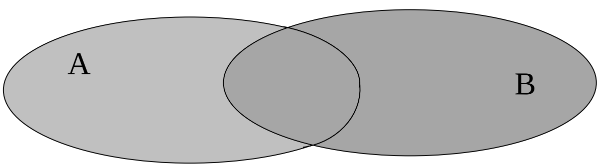
$P(N=11) = P(dado_1 = 5 \text{ AND } dado_2 = 6) \text{ OR } P(dado_1 = 6 \text{ AND } dado_2 = 5) = 1/6*1/6 + 1/6*1/6 = 2/36$

Probabilità congiunta. E' una probabilità incondizionata o a-priori. Non richiede o dipende da altre informazioni.

Probabilità di 2 variabili

$P(X = A \text{ OR } Y = B)=(X=A)+P(Y=B)–P(X=A \text{ AND } Y=B)$ =>
se sono indipendenti = $P(X=A)+P(X=B)$

$P(X = A \text{ AND } Y = B)= P(X=A)+P(Y=B) – P(X=A \text{ OR } Y=B)$ =>
se sono indipendenti = $P(X=A)P(X=B)$



Dipendenza tra probabilità

Supponiamo ora che il primo dado abbia mostrato 5. Abbiamo un'informazione. Perchè N = 11, occorre che il secondo dato mostri 6.

$P(N=11 \mid Dado_1 = 5) = 1/6 \;>\; P(N=11)$ Abbiamo un'incertezza minore.

Probabilità condizionata o a-posteriori.

$P(Y=A \mid X=B)$

Un agente cerca di raccogliere più informazioni possibili per diradare l'incertezza e formulare quindi dei problemi descrivibili con probabilità condizionate.

La probabilità condizionata stabilisce una precedenza, una corrispondenza, una dipendenza funzionale tra B e A. Dato B, determino A.

Relazione tra probabilità condizionata e congiunta

$P(a \mid b) = P(a \text{ AND } b) / P(b)$ $P(a \text{ AND } b)$ è probabilità congiunta

Nel caso dei dadi:

$P(N = 11 \mid Dado_1 = 5) = 1/6$

Possiamo riscrivere la probabilità condizionata come: $P(a \text{ AND } b) = P(a \mid b)\, P(b)$

$P(N = 11 \mid Dado_1 = 5) = P(N=11 \text{ AND } Dado_1 = 5) / P(Dado_1 = 5) = (1/36) / (1/6) = 1/6$

Ovverosia:

$P(N=11 \text{ AND } Dado_1 = 5) = P(N = 11 \mid Dado_1 = 5) * P(Dado_1 = 5) =$
$(1/6) * (1/6) = 1/36.$

b = Dado1 = 5, restringe le possibili configurazioni. Ne scarta 5/6.

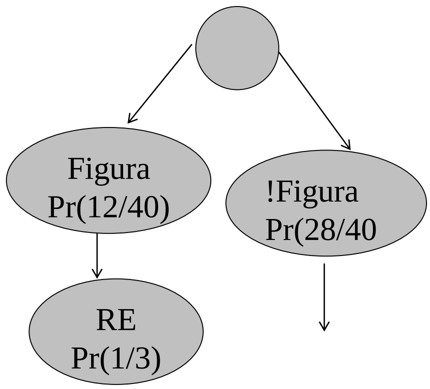
Probabilità condizionata e semplice

Consideriamo un mazzo di 40 carte:
vogliamo valutare quale sia la probabilità che una carta estratta a caso sia un re (probabilità semplice)
vogliamo valutare quale sia la probabilità che una carta estratta a caso sia un re, sapendo di avere estratto una figura (probabilità condizionata)

P(Y) = probabilità che sia un re
P(X) = probabilità che sia una figura

P(Y | X) = 1/3

P(Y) = P(Y/X) P(X) = 1/3 12/40 = 4/40

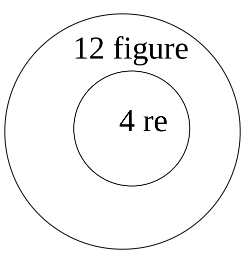


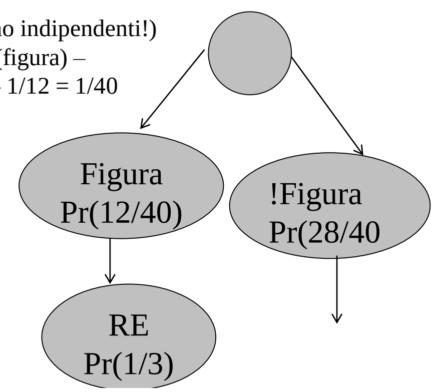
Probabilità congiunta

Probabilità di avere un re di cuori o un re di quadri

P ((Y= re_cuori) OR (Y = re_quadri)) = P(Y = re_quadri) + P(Y = re_cuori) = 2/40

Probabilità di avere un re di cuori **e** una figura (non sono indipendenti!)
P((Y = re_cuori) AND (Y = figura)) = P(Y=re_cuori)P(figura) –
P(Y=re_cuori) OR Y=figura) = 1/40 + 1/12 – 1/12 = 1/40





Probabilità di avere un re di cuori **o** una figura (non sono indipendenti!)
P((Y = re_cuori) OR (Y = figura)) = P(Y=figura) = 12/40
P((Y = re_cuori) + P(Y = figura)) – P(Y=re_Cuori AND Y = figura)) = 1/40 + 12/40 – 1/40

Inferenza statistica

- Calcolo della probabilità di un evento, a partire dall'informazione collezionata sperimentalmente.

- Consideriamo tre variabili binarie: Mal di denti, Carie, Cavità in dente, e le probabilità congiunte:

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

$$\sum P(a_i, b_j, c_k) = 1$$

La nostra "funzione" misura il mal di denti e se c'è una cavità (effetto) in dipendenza o meno della presenza di carie (la causa)

Esempi di inferenza statistica

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

P(carie OR mal di denti) = P(carie) + P(mal di denti) – P(carie AND mal di denti) = 0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008 + 0,108 + 0,012 + 0,016 + 0,064 - 0,108 – 0,012= 0,28

P(carie AND mal di denti) != P(carie)P(mal di denti) - Non sono indipendenti!! = 1 – (P(!carie) OR P(!mal di denti))

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

P(carie) = 0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008 = 0,2

$$P(Y) = \sum_{z \in Z} P(Y, z)$$

Marginalizzazione rispetto a "carie" = Y (summing out): tutte le variabili diverse da "carie", collassano nella sommatoria.

Condizionamento statistico

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

Probabilità a-priori:

P(mal di denti) = 0,108 + 0,012 + 0,016 + 0,064 = 0,2

P(!mal di denti) = 0,8

Probabilità condizionate: P(a | b) = P(a AND b) / P(b)

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,54	0,06	0,09	0,01
!carie	0,08	0,32	0,18	0,72

Probabilità condizionate P(carie| mal di denti)

Condizionamento statistico

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,54	0,06	0,09	0,01
!carie	0,08	0,32	0,18	0,72

Probabilità condizionate P(carie| mal di denti)

P(mal di denti) = 0,108 + 0,012 + 0,016 + 0,064 = 0,2

P(!mal di denti) = 0,8

$P(carie) = P(Y) = \sum_{z \in Z} P(Y \mid z) P(z)$ = P(Carie | mal di denti)P(mal di denti) +

P(Carie | !mal di denti)P(!mal di denti) = (0,54+0,06) * 0,2 + (0,09+0,01) * 0,8 = 0,2

Come utilizziamo la stima a-posteriori

Vogliamo determinare la probabilità di un evento partendo dalla conoscenza sperimentale di altre.

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

P(carie | mal di denti) = P(carie AND mal di denti) / P(mal di denti)

= (0.108 +0.012)/(0.108+0.012+0.016+0.064) = 0.6

P(!carie | mal di denti) = P(!carie AND mal di denti) / P(mal di denti) = 0.4

P(mal di denti) è la probabilità marginale relativa al mal di denti P(mal di denti) = 0,2. Ha una funzione di normalizzazione. Il rapporto tra P(carie) e P(!carie) non dipende da P(mal di denti).

P(carie | mal di denti) = α P(carie AND mal di denti)

Inferenza statistica nel caso generale

- Consideriamo una funzione con incertezza: P(X | E, Y) dove e sono le variabili osservate e y quelle non osservate.
- La P(X | e) = P(X,e) = $\sum_{y \in Y} \left(P(X, e, y) / P(y) \right)$

Quando si vuole una valutazione comparativa, il termine P(y) non cambia la funzione P(X|e) e può essere omesso:
P(X | e) = P(X,e) = $\alpha \sum_{y \in Y} P(X, e, y)$

Non si riesce a rappresentare graficamente comunque quando il numero di variabili cresce.

Indipendenza statistica
P(X | Y) = P(X) se X non dipende da Y
P(X, Y) = P(X) P(Y) se X ed Y sono indipendenti.
P(X)

Overview

Probabilità semplice e condizionata

Teorema di Bayes

Teorema di Bayes

P(X,Y) = P (Y|X)P(X) = P(X|Y)P(Y)

$$\boxed{P(X|Y) = \frac{P(Y \mid X)P(X)}{P(Y)}}$$

X = causa Y = effetto

$$\boxed{P(\text{causa}|\text{effetto}) = \frac{P(Effetto \mid Causa)\,P(Causa)}{P(Effetto)}}$$

We usually do not know the statistics of the cause, but we can measure the effect and , through frequency, build the statistics of the effect or we know it in advance.

A doctor knows P(Symptons|Causa) and wants to determine P(Causa|Symptoms)

Esempio I

In una città lavorano due compagnie di taxi:
blue e verde: X = {T_{blu}, T_{verde}} con una
Distribuzione di 85% di taxi verdi e 15% di taxi blu.

Succede un incidente in cui è coinvolto un taxi.

Un testimone dichiara che il taxi era blu. Era sera e l'affidabilità del testimone è stata valutata dell'80%.

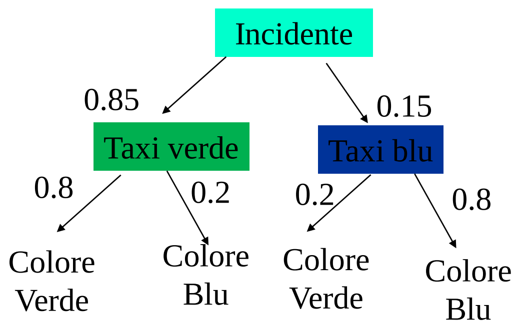
Qual è la probabilità che il taxi fosse effettivamente blu?

Non è l'80%!

Esempio - I

X = {Taxi_incid = blu, Taxi_incid = verde }
"Causa"

Y = {Taxi_test = blu, Taxi_test = verde}
"Effetto"



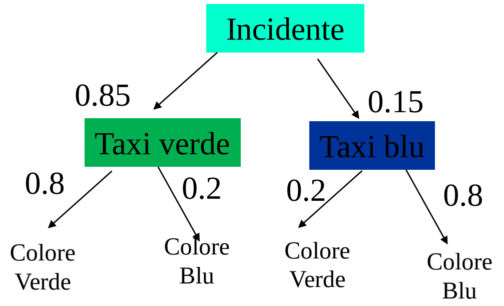
P(X= Taxi_incid = blu | Taxi_test = blu) = P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) / P(Taxi_test = blu)

P(Taxi_incid = blu) = Probabilità a-priori = 0.15
P(Taxi_test = blu | Taxi_test = blu) = Probabilità condizionata = 0.8

Esempio - I

X = {Taxi_incid = blu, Taxi_incid = verde }
"Causa"

Y = {Taxi_test = blu, Taxi_test = verde}
"Effetto"



Inverto la relazione tra causa ed effetto applicando Bayes:

P(Taxi_incid = blu | Taxi_test = blu) = P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) / P(Taxi_test = blu)

P(Taxi_test = blu) = Probabilità marginale di Y (probabilità semplice) =
P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) +
P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = verde)P(Taxi_incid = verde) = 0.8*0.15 + 0.2*0.85 = 0.29

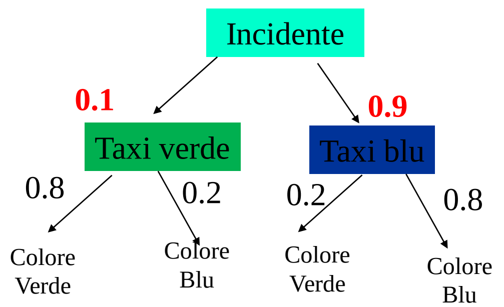
P(Taxi_incid = blu | Taxi_test = blu) = P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) / P(Taxi_test = blu) = 0.8*0.15 / 0.29 = 0.41 > 0.15!!

Pesano anche gli "errori" commessi quando il testimone vede un taxi verde!

Esempio - I

X = {Taxi_incid = blu, Taxi_incid = verde }
"Causa"

Y = {Taxi_test = blu, Taxi_test = verde}
"Effetto"



P(Taxi_incid = blu | Taxi_test = blu) = P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) / P(Taxi_test = blu)

P(Taxi_test = blu) = Probabilità marginale di Y (probabilità semplice) =
P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) +
P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = verde)P(Taxi_incid = verde) = 0.8*0.9 + 0.2*0.1 = 0.74

P(Taxi_incid = blu | Taxi_test = blu) = P(Taxi_test = blu | Taxi_incid = blu)P(Taxi_incid = blu) / P(Taxi_test = blu) = 0.8*0.9 / 0.74 = 0.97

Testimonianza molto affidabile!

Esempio - II

Lo strumento principe per lo screaning per il tumore al seno è la radiografia (mammografia).

Definiamo X la situazione della donna: X={sana, malata}
Definiamo Y l'esito della mammografia: Y={positiva, negativa}

La sensitività della mammografia è intorno al 90%:

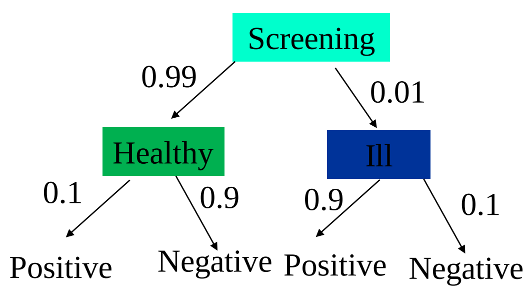
$$\text{sensitività} = \frac{n_{positive}}{N_{ill}} \quad \Rightarrow P(Y=\text{positive} \mid X=\text{ill})$$

La specificità della mammografia è anch'essa intorno al 90%:

$$\text{specificità} = \frac{n_{negative}}{N_{healthy}} \quad \Rightarrow P(Y=\text{negative} \mid X=\text{healthy})$$

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}



P(Y=Positive | X=Ill) = 0.9 * 0.01 = 0.009
P(Y=Positive | X=Ill) = 0.1*0.99 = 0.099

P(Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.009 + 0.099 = 0.108

10.8% di probabilità di avere un esame positivo a fronte di uno 0.01% di donne malate! Solo lo 0,9% proviene da donne effettivamente malate, le altre sono false positive

Esempio - II

Qual'è la probabilità che una donna sia veramente malata se il test risulta positivo?

Applichiamo Bayes:
P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive)

P(X = Ill) = 0.01

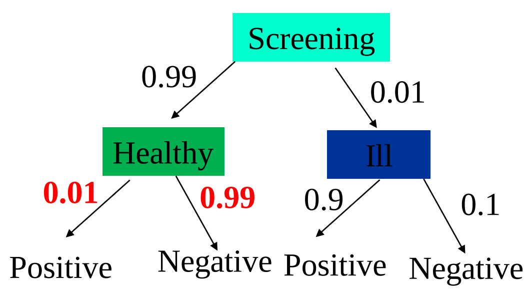
Il PPV (Positive Predictive Value) è:
P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive) =
0.09 / 0.108 = 0.083 (8.3%)

Solo 8.3% delle donne con mammografia positiva sono effettivamente ammalate.

Analizzando la formula del teorema di Bayes, dove ha senso investire per ottenere un rendimento delle screening maggiore?

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}



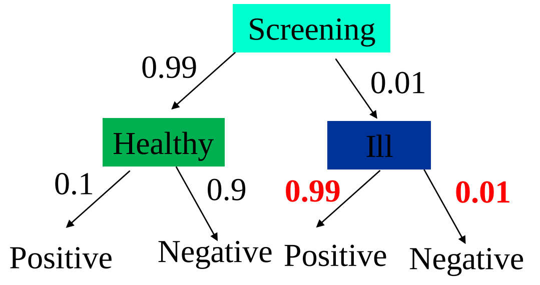
P(Y=Positive | X=Ill) = 0.9 * 0.01 = 0.009

P(Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.009 + 0.99*0.01 = 0.0189

P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive) =
= 0.009 / 0.0189 = 0.476 = 47,6% >> 8.3%

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}



P(Y=Positive | X=Ill) = 0.99 * 0.01 = 0.0099

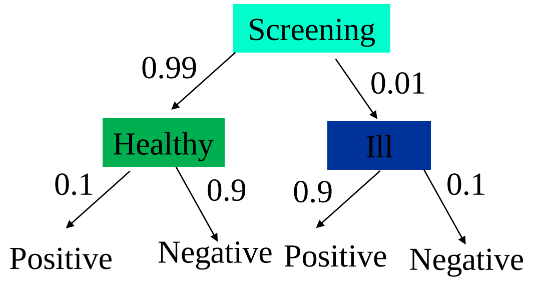
P(Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.0099 + 0.99*0.1 = 0. 1098

P(X=Ill | Y=Positive) = P(Y=Positive | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Positive) =
= 0.0099 / 0.1098 = 0.09 = 9% > 8.3%.

Esempio II

X = {Healthy, Ill}
Y = {Positive, Negative}

Falsi negativi?
P(X = Ill | Y = Negative)?

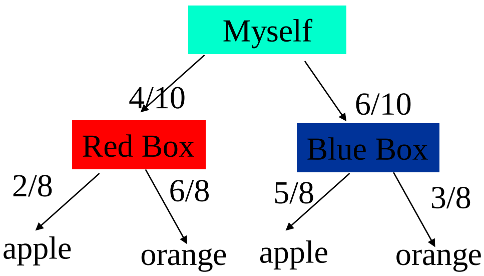


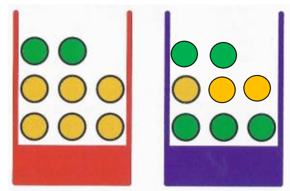
P(Y=Negative | X=Ill) = 0.1 * 0.01 = 0.001

P(Y=Negative) = P(Y=Negative | X=Ill) + P(Y=Positive | X=Healthy) =
0.001 + 0.99*0.9 = 0.891

P(X=Ill | Y=Negative) = P(Y=Negative | X=Ill)P(X=Ill) / P(Y=Negative) =
= 0.001 / 0.891 = 0.11%
Una donna ogni mille non viene diagnosticata!

Esempio - 3





Supponiamo di conoscere P(X), probabilità di scelta del box, e la P(Y|X), probabilità di avere una mela (arancia) se scegliamo un certo box, possiamo determinare la probabilità assoluta (semplice) di scegliere un certo frutto, P(Y)?

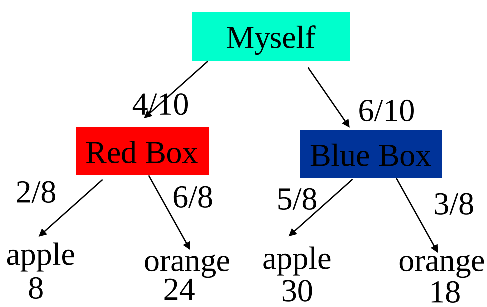
Supponiamo di non conoscere P(X), probabilità di scelta del box, conosciamo la probabilità P(Y|X) e P(Y). Possiamo determinare P(X)?

Determino P(Y)

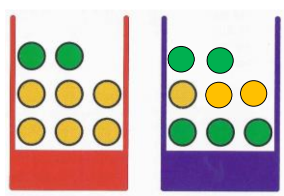
$P(Y=apple) \neq (2+5) / 16 = 7/16$
$P(Y=orange) \neq (6+3)/16 = 9/16$

$P(Y=apple \mid X = blue) = 5/8$
$P(Y=orange \mid X = blue) = 3/8$

$P(Y=apple \mid X = red) = 2/8$
$P(Y=orange \mid X = red) = 6/8$



$P(Y=apple \mid X = blue) + P(Y=orange \mid X = blue) = 1$
$P(Y=apple \mid X = red) + P(Y=orange \mid X = red) = 1$



$P(Y=apple) = P(Y=apple \mid X = blue) P(X=blue) + P(Y=apple \mid X = red) P(X=red) = 5/8*6/10 + 2/8*4/10 = 38/80 \neq 7/16$
$P(Y=orange) = P(Y=orange \mid X = blue) P(X=blue) + P(Y=orange \mid X = red) P(X=red) = 3/8*6/10 + 6/8*4/10 = 42/80 \neq 9/16$

Determino P(Y) - tabella

	Red	Blue
Apple	4/10*2/8	6/10*5/8
Orange	4/10*6/8	6/10*3/8

y_j

x_i

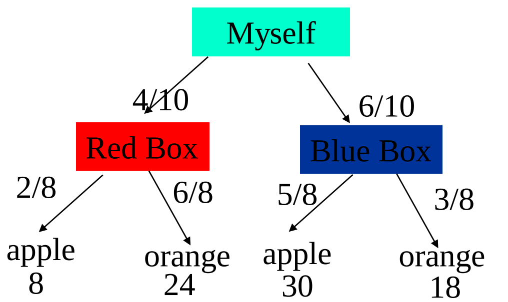
Sommo lungo x, marginalizzo x.

P(Y=apple) = 5/8*6/10 + 2/8*4/10 = 38/80
P(Y=orange) = 3/8*6/10 + 6/8*4/10 = 42/80

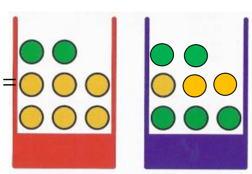
P(X=red) = 4/10*2/8 + 4/10*6/8 = 4/10
P(X=blue) = 6/10*5/8 + 6/10*3/8 = 6/10

Determino P(X|Y)

$$\boxed{P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}}$$



P(X=red | Y=orange) = P(Y=orange|X=red) P(X=red)/P(Y=orange) =
(6/8*4/10) / (21/40) = 24/42 > 4/10
P(X=blue | Y=orange) = P(Y=orange|X=blue) P(X=blue)/P(Y=orange) =
(3/8*6/10) / (21/40) = 18/42 < 6/10



P(X=red | Y=apple) = P(Y=apple | X=red) P(X=red) / P(Y=apple) =
(2/8*4/10) / (19/40) = 8/38 << 4/10
P(X=blue | Y=apple) = P(Y=apple | X=blue) P(X=blue) / P(Y=apple) =
(5/8*6/10) / (19/40) = 30/38 >> 6/10

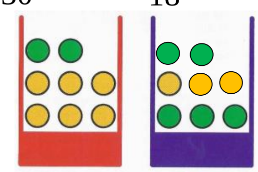
Interpretazione

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

P(X=red | Y=apple) = 8/38 << 4/10
P(X=blue | Y=apple) = 30/38 >> 6/10

Myself
4/10 → Red Box; 6/10 → Blue Box
Red Box: 2/8 → apple 8; 6/8 → orange 24
Blue Box: 5/8 → apple 30; 3/8 → orange 18

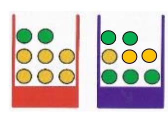
Correggo la probabilità a-priori, P(X) con le informazioni raccolte, P(Y), e ottengo una nuova valutazione della probabilità di X (che dipende da Y), P(X | Y) detta probabilità a-posteriori.



	Red	Blue	
Apple	4/10*2/8=8/80 – 8	6/10*5/8=30/80 – 30	y_j
Orange	4/10*6/8=24/80 - 24	6/10*3/8=18/80 - 18	
		x_i	

Importanza

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$



Myself
4/10 → Red Box; 6/10 → Blue Box
Red Box: 2/8 → apple 8; 6/8 → orange 24
Blue Box: 5/8 → apple 30; 3/8 → orange 18

Questo è un tipico esempio di problema **inverso**.

Raccogliamo delle misure Y e vogliamo determinare da quale sistema (modello probabilistico) possono essere state generate.

Possiamo inserire delle informazioni statistiche (a-priori) su X, cioè sulla forma del modello (e.g. smoothness).

Affidabilità della stima - SW in Matlab

N = 10 ➔ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.5$

N = 100 ➔ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.3235$

N = 1,000 ➔ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4$

N = 10,000 ➔ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4157$

N = 100,000 ➔ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4173$

N = 1,000,000 ➔ $P(X=T_{blu}|Y_{blu}) = P(Y_{blu}|X_{blu})P(X_{blu}) / P(Y_{blu}) = 0.4158$

Possiamo dare degli intervalli di confidenza?
Quanto deve essere grande N per ottenere una certa confidenza?

Estensione a più variabili

$P(X| Y_1;Y_2)$ if $(P(Y_1) = y_1$ and $P(Y_2) = y_2$ then $P(X) = x$

$Z = Y_1$ *and* Y_2

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

Dalla tabella delle probabilità congiunte ricaviamo:

P(carie; Z) = P(mal di denti; cavità) = 0,108

P(carie | Z) = P(carie ; Z) / P(Z) = 0,108 / 0,124 = 0,871

Estensione a più variabili

P(X| Y_1;Y_2) if (P(Y_1) = y_1 and P(Y_2) = y_2 then P(X) = x

Z = Y_1 *and* Y_2

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

Applichiamo il teorema di Bayes
P(X | Y_1 and Y_2) = P(Y_1 and Y_2 | X) * P (X)

Abbiamo bisogno di conoscere come si comporta Z per ogni valore di X, cioè (Mal di denti *and* Cavità) in funzione di Carie. Diventa difficoltoso quando le variabili diventano tante: per capire se c'è una carie possiamo misurare anche: raggi-X, igiente orale....

Conditional independence

P(X | Y_1 and Y_2) = P(Y_1 and Y_2 | X) * P (X)

Introduciamo un'altra ipotesi. Cosa succede se Y_1 e Y_2 sono indipendenti? Dipendono entrambe da X ma non dipendono tra di loro.

Sono cioè **condizionatamente indipendenti**, cioè vale che:
P(Y_1 and Y_2 | X) * P (X) = P(Y_1 | X) * P(Y_2 | X)

In questo caso:

P(cavità and mal di denti | carie) = P(cavità | carie) * P(mal di denti | carie) che diventa più trattabile.

P(Carie ; cavità ; mal di denti) = P(Carie) [P(Cavità | Carie)*P(Mal di denti | carie)

Modello Naive Bayes Gli effetti sono indipendenti tra loro e dipendono da una stessa causa

In generale: P(Causa | $Effetto_1$ and $Effetto_2$ and ... $Effetto_N$) = $\boxed{\prod_{i=1}^{N} P(Effetto_i | Causa)}$

Conditional independence at work

P(X| Y_1;Y_2) if (P(Y_1) = y_1 and P(Y_2) = y_2 then P(X) = x

	mal di denti		!mal di denti	
	cavità	!cavità	cavità	!cavità
carie	0,108	0,012	0,072	0,008
!carie	0,016	0,064	0,144	0,576

P(X | Y_1 and Y_2) = P(Y_1 and Y_2 | X) * P (X) / (P(Y_1) and P(Y_2))

P(carie | cavità and mal di denti) = P(cavità and mal di denti and carie) / P(cavità and mal di denti) = 0,108 / 0,124 = 87,1%

P(carie | cavità and mal di denti) = P(cavità and mal di denti | carie) * P(carie) ~~/ P(cavità and mal di denti)~~
P(carie | cavità and mal di denti) = P(cavità | carie) * P(mal di denti | carie) * P(carie) ~~/ (P(cavità) and P(mal di denti))~~

P(cavità | carie) = 0,18 / 0,2 = 0,9 P(carie) = 0,2
P(mal di denti | carie) = 0,12 / 0,2 = 0,6

P(carie | cavità and mal di denti) = (0,9* 0,6 * 0,2) / (0,124) = 87,1%

Valutazione dei risultati in test binari

$$\text{Selectivity} = \frac{TP}{TP+FN} = \frac{N_{true\_pos}}{N_{all\_pos}} = P(TP_{true} \mid TP)$$

$$\text{Specificity} = \frac{TN}{TN+FP} = \frac{N_{true\_neg}}{N_{all\_neg}} = P(TN_{true} \mid TN)$$

$$\text{Positive Predictive Value (PPV)} = \frac{TP}{TP+FP} = \frac{N_{true\_pos}}{N_{mes\_pos}} = P(TP_{true} \mid TP_{mis})$$

$$\text{Negative Predictive Value (PPV)} = \frac{TN}{TN+FN} = \frac{N_{true\_neg}}{N_{mes\_neg}} = P(TN_{neg} \mid TN_{mis})$$

Riepilogo

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$$

Teorema di Bayes

Lega probabilità condizionate, congiunte, semplici (marginali)

Consente di inferire la probabilità di un evento causa, X, a partire dalla probabilità associata alla frequenza di una certa misura, effetto, P(Y), dalla frequenza relativa dell'evento associato alla misura, P(Y), e dalla probabilità nota a-priori, P(X), della causa.

La probabilità P(X|Y) viene per questo detta probabilità a-posteriori ed è una probabilità condizionata.

Viene utilizzata nei problemi inversi.

Overview

Probabilità semplice e condizionata

Teorema di Bayes